Aula 5 (Operadores compactos)

Lembrete 1) Sejam E_1, E_2 espaços normados, $A: E_1 \to E_2 \Rightarrow A$ é dito compacto se para todo conjunto $B \subset E_1$ limitado $\overline{A(B)}$ é compacta.

$B_0(E_1, E_2)$ - conjunto dos op-s compactos.

2) $A: E_1 \to E_2$ é compacto sse $\forall \{x_n\} \subset E_1$ limitada $\{Ax_n\}$ possui subsequência convergente.

3) Se $A_n \in B_0(E)$ e $\|A_n - A\| \to 0 \Rightarrow A \in B_0(E)$

4) Se $T \in B(E)$ e $A \in B_0(E) \Rightarrow TA, AT \in B_0(E)$.

Teorema 1 (de Riesz-Schauder) Sejam E esp. de Banach com $\dim E = \infty$ e $A \in B_0(E) \Rightarrow$

1) $0 \in \sigma(A)$

2) $\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$

3) $\forall \varepsilon > 0$ $\sigma(A) \setminus B_\varepsilon(0)$ é finito. Portanto se $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_j\}_1^\infty \Rightarrow |\lambda_j| \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$

4) $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} \Rightarrow \dim N(\lambda - A) = \dim E / R(\lambda - A) = \operatorname{codim} R(\lambda - A) < \infty$.

Demonstração O argumento principal é o seguinte

Teorema 2 (parte da alternativa de Fredholm) Sejam E esp. de Banach, $A \in B_0(E)$ e $\lambda \neq 0 \Rightarrow$

a equação $\lambda x - Ax = y$ possui solução $\forall y \in E$

sse $Ax = \lambda x$ possui única solução $x = 0$, ou seja

$\lambda - A$ é injetor $\iff$ $\lambda - A$ é sobrejetor.

(veja demonstração do Teorema 4.18 na apostila indicada na página)

1) Suponha que $0 \in \rho(A) \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que

$\|Ax\| \geq \delta \|x\|$ $\left(\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\|, \forall y \in E \right)$.

Já que $\dim E = \infty$, $\bar{B}_1(0)$ é não compacto $\Rightarrow$

$\exists \{x_n\} \subset \bar{B}_1(0)$ sem subsequência convergente $\Rightarrow$

$\{Ax_n\}$ não possui subsequência convergente. De fato, suponha que $\exists \{x_{n_k}\}$ tal que $Ax_{n_k} \to y = Ax$ (já que $R(A) = E$) $\Rightarrow$

$\|A(x_{n_k} - x)\| \geq \delta \|x - x_{n_k}\| \Rightarrow x_{n_k} \to x$ (absurdo)

Logo A é não compacto e portanto $0 \in \sigma(A)$.

2) Seja $\lambda \notin \sigma_p(A)$ tal que $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ por T2, $\lambda - A$ é sobrejetor e injetor. $\Rightarrow (\lambda - A)^{-1}$ é limitado em todo E (por T. do gráfico fechado) $\Rightarrow \lambda \in \rho(A) \Rightarrow$

$\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \sigma_p(A)) \subseteq \rho(A) \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \{0\} \cup \sigma_p(A) \Rightarrow$

temos igualdade.

3) Suponha que $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que há quantidade infinita de autovalores diferentes $\{\lambda_j : j \in \mathbb{N}\}$ com $|\lambda_j| \geq \varepsilon$. Sejam x_j autovet-s corresp-s. Define $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Temos $A(X_n) \subseteq X_n$ (invariante)

e $X_{n-1} \subseteq X_n$ (desde que $\{x_1, \dots, x_n\}$ são LI) ③

prova é como na Álgebra Linear

Por Lema de Riesz $\exists y_n \in X_n$ tal que $\|y_n\| = 1$ e $dist(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Seja $z_n = \lambda_n^{-1} y_n \Rightarrow \|z_n\| \leq \varepsilon^{-1}$ e $A(z_n) \in X_n$.

Já que $y_n \in X_n$, temos $y_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow$

$$y_n - A(z_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right) c_j x_j = \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right) c_j x_j \in X_{n-1}$$

Agora, se $n > m \Rightarrow Az_m \in X_m \subseteq X_{n-1}$, logo

$$\|Az_n - Az_m\| \geq dist(Az_n, X_{n-1}) = dist(Az_n + \underbrace{y_n - Az_n}_{\in X_{n-1}}, X_{n-1})$$

$= dist(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ (De fato, $\inf_{x \in X_{n-1}} \|Az_n - x\| =$

$= \inf_{x \in X_{n-1}} \|Az_n - (x - \underset{\substack{\Uparrow \\ X_{n-1}}}{x_0})\|$). Finalmente, $A(\bar{B}_{\frac{1}{\varepsilon}}(0))$

não é precompacto.

4) Mostraremos somente que $\dim N(\lambda - A) < \infty$. Suponha que $\lambda = 1$. Observe que $x \in N(I-A)$ $\Leftrightarrow Ax = x$. Suponha que $\dim N(I-A) = \infty$.

~~mas~~ Considere a bola $\bar{B}_1(0)$ em $N(I-A)$, $\bar{B}_1(0)$ não é compacta. Temos $\bar{B}_1(0) \subseteq \overline{\underbrace{A\restriction_{N(I-A)}}_{\text{restrição de } A \text{ ao núcleo } N(I-A)} B_1(0)}$,

logo $\overline{A\restriction_{N(I-A)} B_1(0)}$ é não compacto, mas isso é absurdo já que $A\restriction_{N(I-A)}$ é compacto (por definição)

Logo $\dim N(I-A)<\infty$. O resto da prova pode ser encontrado em Proposição 4.15 na apostila indicada na página.

Proposição 1 Seja $K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ e

$$T_K f(t)=\int_0^1 K(t,s)f(s)\,ds,\quad f(t)\in C[0,1].$$

Assume que: 1) $K(t,\cdot)$ é integrável $\forall t\in[0,1]$

2) $[0,1]\ni t\longmapsto K(t,\cdot)\in L^1[0,1]$ é contínuo.

$\Rightarrow T_K\in B_0(C[0,1])$

Demonstração Observe que $\|T_K\|\leq\max\limits_{[0,1]}\|K(t,\cdot)\|_{L^1}<\infty$ devido 1) e 2). Seja $\{f_n\}\subset C[0,1]$ tal que $M=\sup\limits_n\|f_n\|<\infty$. Mostraremos que $\exists\{T_K f_{n_j}\}$ convergente. Aplicaremos Teorema de Arzela-Ascoli, ou seja mostraremos que $\{T_K f_n\}$ é uniformemente limitada e equicontínua. Temos:

- $\sup\limits_n\|T_K f_n\|_C\leq M\|T_K\|<\infty\Rightarrow$ unif-te lim.
- sejam $s,t\in[0,1]$, $s\neq t\Rightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$|T_K f_n(s)-T_K f_n(t)|=\left|\int_0^1(K(s,u)-K(t,u))f_n(u)\,du\right|\leq$$

$$\leq\|K(s,\cdot)-K(t,\cdot)\|_{L^1}\|f_n\|_\infty<\varepsilon\|f_n\|_\infty,\ |s-t|<\delta$$

devido 2). Logo, $\{T_K f_n\}$ contém subsequência convergente.

Ex1 Seja $E = C[0,1]$ e $T \in B(E)$ tal que ⑤

$$Tf(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)\,ds, \quad G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 1) $T \in B_0(E)$ (segue da Prop. 1 já que $G(t,s) \in C([0,1]^2)$.

2) $\forall f \in E$ temos $(Tf)(0) = (Tf)(1)$ e $(Tf)''(t) = -f(t)$ $\forall t \in [0,1]$.

De fato $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 1-s, & 0 < t < s < 1 \\ -s, & 0 < s < t < 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$(Tf)'(t) = \int_0^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s)\,ds = -\int_0^t s f(s)\,ds + \int_t^1 (1-s) f(s)\,ds =$$

$$= -\int_0^1 s f(s)\,ds + \int_t^1 f(s)\,ds \Rightarrow (Tf)''(t) = 0 - f(t) = -f(t)$$

<u>Observação</u> $T = S^{-1}$, onde $Sf = -f''$,

$D(S) = \{ f \in C^2[0,1] : f(0) = f(1) = 0 \}$.

3) $\sigma_p(T) = \left\{ \frac{1}{\pi^2 k^2}, k = 1, 2, \dots \right\}$!

Seja $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \exists f_\lambda \in C[0,1]$ tal que $Tf = \lambda f$ ou $(Tf)'' = \lambda f''$ ou $-f = \lambda f''$ e $f \in D(S)$. Logo $f(t) = A \exp\left(\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}\, t\right) + B \exp\left(-\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}\, t\right)$.

Como $f(0) = \cancel{f(1)} = 0$, $A + B = 0$.

Denotamos $z = \sqrt{-\frac{1}{\lambda}} \underset{f(1)=0}{\Rightarrow} e^{\mathrm{Re}\,z} e^{i\,\mathrm{Im}\,z} = e^{-\mathrm{Re}\,z} e^{-i\,\mathrm{Im}\,z} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{Re z} = e^{-Re z} \Rightarrow Re z = 0 \Rightarrow Re\left(\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}\right) = Re\left(i\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\right) = 0$

$\Rightarrow \lambda > 0. \Rightarrow$

$\exp\left(i\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\right) = \exp\left(-i\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen}\sqrt{\frac{1}{\lambda}} = -\operatorname{sen}\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\lambda}} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\pi^2 k^2}$.

Mostre que $0 \notin \sigma_p(T)$!

Observe que autovetores correspondentes são $f(x) = \operatorname{sen}(k\pi t)$.

Ex 2 Observe que os seguintes operadores são não compactos devido às propriedades espectrais deles:

1) $E = D(A) \in \{c_0, \ell^p, 1 \le p \le \infty\}$

$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

De fato, $\sigma(A) = \bar{B}_1(0)$ (veja aulas anteriores)

2) $E = D(T(t)) = L^p(\mathbb{R}),\ 1 \le p \le \infty,$

$T(t) f = f(\cdot + t)$.

$\sigma(T(t)) = \partial B_1(0)$

3) $E = D(A) = C[0,1],\ Af = m \cdot f,\ m \in C[0,1]$

$\sigma(A) = m([0,1])$

Operadores com resolvente compacta

Def: Sejam E esp. de Banach, $A: D(A) \subset E \to E$ fechado $\Rightarrow$ A possui resolvente compacta se existir $\lambda \in \rho(A)$ tal que $R_\lambda(A) \in B_0(E)$.

Observação Se $R_{\lambda_0}(A) \in B_0(E) \Rightarrow R_\lambda(A) \in B_0(E)$ $\forall \lambda \in \rho(A)$. De fato, pela identidade de Hilbert, temos $R_\lambda(A) = \underbrace{R_{\lambda_0}(A)}_{comp.} + \underbrace{(\lambda_0 - \lambda) \underbrace{R_{\lambda_0}(A)}_{comp} \underbrace{R_\lambda(A)}_{limitado}}_{comp.}$

Seja $A: D(A) \subset E \to E$ fechado.

Definimos $[D(A)] = (D(A), \|\cdot\|_A)$, onde $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$.

Lema 1 Seja $A: D(A) \to E$ fechado, $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow$ as seguintes afirmações são equivalentes:

1) A tem resolvente compacta

2) Seja $\{x_n\} \subset D(A)$ limitada em $[D(A)] \Rightarrow$ $\{x_n\}$ possui subseq. convergente em E.

3) Inclusão $J: [D(A)] \to E$ é compacta.

Demonstração 1) $\Rightarrow$ 2) Seja $\{x_n\} \in D(A)$ tal que $\|x_n\|_A \leq C$. Define $y_n = \lambda x_n - Ax_n \Rightarrow \|y_n\| \leq |\lambda| \cdot \|x_n\|_A + \|x_n\|_A$ $\leq (1 + |\lambda|)C$. Já que $R_\lambda(A)$ é comp. $\Rightarrow$ $\{x_n\} = \{R_\lambda(A) y_n\}$ possui subseq.-a conv-te em E

2) ⟹ 3) Seja $J : [D(A)] \to E$ tal que

$Jx = x$, $\|Jx\|_E = \|x\|_E \le \|x\|_A \Rightarrow \|J\| \le 1$

Seja $\{x_n\}$ limitada em $[D(A)] \overset{2)}{\Rightarrow} \{Jx_n\} = \{x_n\}$ possui subsequência convergente em E.

3) ⟹ 1) Consideremos $\tilde{R}_\lambda(A) \in B(E, [D(A)])$ tal que $\tilde{R}_\lambda(A)x = R_\lambda(A)x$, $x \in E$. De fato, $\|\tilde{R}_\lambda(A)x\|_A \le$

$$\le \|R_\lambda(A)x\| \cancel{\le \|R_\lambda(A)\| \, \|x\|} + \|A R_\lambda(A)x\| \le \|R_\lambda(A)\| \, \|x\| + \|x\| + |\lambda| \, \|R_\lambda(A)\| \, \|x\| = \boxed{\left(1 + \|R_\lambda(A)\|(1+|\lambda|)\right)\|x\|}$$

Temos $R_\lambda(A) = \underbrace{J}_{\text{comp}} \underbrace{\tilde{R}_\lambda(A)}_{\text{limitado}} : E \to E$ é compacto

Ex 3 1) Sejam $E = C[0,1]$, $D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$ e $(Ax)(t) = x'(t)$. Anteriormente mostramos que $\sigma(A) = \emptyset \Rightarrow \rho(A) = \mathbb{C}$.

Mostremos que A possui resolvente compacta.

Consideremos $\{x_n\}$ limitada em $[D(A)]$, isto é

$\|x_n\|_A = \|x_n\| + \|Ax_n\| = \|x_n\| + \|x_n'\| \le C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema 1 basta mostrar que $\exists \{x_{n_k}\}$ convergente em E:

- $\|x_n\| \le C \Rightarrow \{x_n\}$ é lim. uniformemente
- $|x_n(t) - x_n(s)| = \left| \int_s^t x_n'(y)\,dy \right| \le |t-s| \cdot C \Rightarrow$

$\{x_n\}$ é equicontínua ⟹ por T. de Arzelà-Ascoli $\exists \{x_{n_k}\}$ conv-te.

9

2) $E = C[0,1]$, $D(A) = C^1[0,1]$, $(Ax)(t) = x'(t)$ $\Rightarrow \sigma_p(A) = \mathbb{C}$. De fato, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $x_\lambda = e^{\lambda t}$ é autovetor, logo $\rho(A) = \phi \Rightarrow A$ não tem resolvente compacta mesmo com condições 1) e 3) do Lema 1 válidas.

(Problema é que $\rho(A) = \phi$!)